OSZTÁLY: VI. ALGEBRA

Elméleti összefoglaló

Származtatott aránypárok

Egy aránypárból kiindulva különböző eljárásokkal újabb aránypárt kapunk, amit **származtatott aránypárnak** nevezünk.

a) Azonos tagú származtatott aránypárokat kapunk, ha

- felcseréljük a beltagokat: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ *Példa*: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{4}{8}$

- felcseréljük a kültagokat: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$ *Példa*: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$

- mindkét arányt megfordítjuk: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ *Példa*: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{4}{3}=\frac{8}{6}$

b) Megváltoztatott tagú származtatott aránypárokat kapunk, ha

- megszorozzuk vagy elosztjuk egy nullától különböző számmal:

-egyik arány mindkét tagját:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\cdot m}{b\cdot m}=\frac{c}{d}\ \text{vagy}\ \frac{a}{b}=\frac{c\cdot m}{d\cdot m}\ (m\neq 0)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a:m}{b:m}=\frac{c}{d}\ \text{vagy}\ \frac{a}{b}=\frac{c:m}{d:m}\ (m\neq 0)$$

-mindkét számlálót: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a\cdot m}{b}=\frac{c\cdot m}{d}$ vagy $\frac{a:m}{b}=\frac{c:m}{d}$ $(m\neq 0)$

-mindkét nevezőt: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b\cdot m}=\frac{c}{d\cdot m}$ vagy $\frac{a}{b:m}=\frac{c}{d:m}$ $(m\neq 0)$

Példák: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

$$\frac{3\cdot 5}{4\cdot 5}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{15}{20}=\frac{6}{8}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6\cdot 5}{8\cdot 5}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{30}{40}$$

$$\frac{3:2}{4:2}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{1{,}5}{2}=\frac{6}{8}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{6:2}{8:2}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

$$\frac{3\cdot 5}{4}=\frac{6\cdot 5}{8}\Rightarrow\frac{15}{4}=\frac{30}{8}$$

$$\frac{3:2}{4}=\frac{6:2}{8}\Rightarrow\frac{1{,}5}{4}=\frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4\cdot 5}=\frac{6}{8\cdot 5}\Rightarrow\frac{3}{20}=\frac{6}{40}$$

$$\frac{3}{4:2}=\frac{6}{8:2}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{6}{4}$$

Nume prenume:Tempfli Gabriella
Şcoala: Colegiul Naţional "Kölcsey Ferenc", Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com

- egyik tag összeadással vagy kivonásával az aránypár mindkét oldalát ugyanúgy változtatjuk:

  - hozzáadjuk (vagy kivonjuk) a nevezőket a számlálókhoz:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} \text{ vagy } \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\ (a>b)$$

  - hozzáadjuk (vagy kivonjuk) a számlálókat a nevezőkhöz:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a}{b+a}=\frac{c}{d+c} \text{ vagy } \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\ (b>a)$$

  - összeadjuk (vagy kivonjuk) a számlálókat és a nevezőket:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d} \text{ vagy } \frac{a-c}{b-d}=\frac{c}{d}\ (a>c)$$

Példák : $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

$$\frac{3+4}{4}=\frac{6+8}{8}\Rightarrow\frac{7}{4}=\frac{14}{8}$$

$$\frac{4-3}{4}=\frac{8-6}{8}\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{2}{8}$$

$$\frac{3}{4+3}=\frac{6}{8+6}\Rightarrow\frac{3}{7}=\frac{6}{14}$$

$$\frac{3}{4-3}=\frac{6}{8-6}\Rightarrow\frac{3}{1}=\frac{6}{2}$$

$\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$

$$\frac{3+6}{4+8}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{9}{12}=\frac{6}{8}$$

$$\frac{6-3}{8-4}=\frac{6}{8}\Rightarrow\frac{3}{4}=\frac{6}{8}$$

Példákamelyekben a származtatott aránypárokat alkalmazzuk:

1) Határozzátok meg az x és y *pozitiv racionális számokat*, ha $\frac{x}{y}=\frac{7}{3}$ és

a) $x - y = 16$; b) $x + y = 30$; c) $2x - 3y = 30$.

Megoldás:

a) Az $\frac{x}{y}=\frac{7}{3}$ aránypárból kiindulva eljutunk a $\frac{x-y}{y}=\frac{7-3}{3}$ változtatott tagú aránypárhoz (mindkét arányban kivontuk a nevezőt a számlálóból).

Az $x - y = 16$ adott, így $\frac{16}{y}=\frac{4}{3}$, ahonnan $y=\frac{3\cdot 16}{4}\Rightarrow y=12$.

Az x -t megkapjuk az $x - y = 16$ különbségből, ahol $y = 12$. Következik $x = 16 - 12 = 4$.

Az eredmény $x = 4$ és $y = 12$.

Nume prenume:Tempfli Gabriella
Şcoala: Colegiul Naţional "Kölcsey Ferenc", Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com

b) Az $\frac{x}{y}=\frac{7}{3}$ aránypárból kiindulva eljutunk a $\frac{x+y}{y}=\frac{7+3}{3}$ változtatott tagú aránypárhoz (mindkét arányban hozzáadtuk a nevezőt a számlálóhoz).

Helyettesítjük a kapott aránypárban $x + y = 30$ és így $\frac{30}{y}=\frac{10}{3}$, ahonnan $y=\frac{3\cdot 30}{10}\Rightarrow y=9$

$x = 30 – 9 = 21$. Az eredmény $x = 21$ és $y = 9$.

c) El kell jutnunk egy olyan származtatott aránypárhoz, amelynek a számlálója $2x – 3y$.
Az $\frac{x}{y}=\frac{7}{3}$ aránypárból, megszorozva 2-vel a két számlálót, kapjuk $\frac{2x}{y}=\frac{14}{3}$, majd a kapott aránypárt tovább származtatjuk, szorozva a nevezőket 3-mal és kapjuk $\frac{2x}{3y}=\frac{14}{9}$. Ezt is tovább származtatjuk kivonva a nevezőket a számlálókból, és kapjuk a $\frac{2x-3y}{3y}=\frac{14-9}{9}$ aránypárt.

Helyettesítjük a $2x – 3y = 30$ és kapjuk $\frac{30}{3y}=\frac{5}{9}$, ahonnan $3y=\frac{30\cdot 9}{5}\Rightarrow 3y=54\Rightarrow y=18$

Az x-t az eredeti aránypárból számoljuk ki: $\frac{x}{y}=\frac{7}{3}\Rightarrow\frac{x}{18}=\frac{7}{3}\Rightarrow x=\frac{18\cdot 7}{3}=42$

Az eredmény $x = 42$ és $y =18$.

2) Tudva, hogy az $\frac{a}{b}$ arány értéke 1,2, számítsátok ki az $\frac{a+b}{a-b}$ arány értékét!

Megoldás:

$$\frac{a}{b}=1,2\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{12^{(2}}{10}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{6}{5}$$

Az $\frac{a}{b}=\frac{6}{5}$ aránypárban felcserélve a beltagokat kapjuk az $\frac{a}{6}=\frac{b}{5}$ azonos tagú származtatott aránypárt. Az aránypárban a két arány értéke egyenlő, tehát $\frac{a}{6}=\frac{b}{5}=k$, ahonnan $\frac{a}{6}=k\Rightarrow a=6k$ és $\frac{b}{5}=k\Rightarrow b=5k$. Ezeket behelyettesítjük a kért arányba, elvégezzük a műveleteket, majd egyszerűsítünk k-val: $\frac{a+b}{a-b}=\frac{6k+5k}{6k-5k}=\frac{11k^{(k}}{1k}=\frac{11}{1}=11$. Az eredmény $\frac{a+b}{a-b}=11$.

Nume prenume:Tempfli Gabriella
Şcoala: Colegiul Naţional "Kölcsey Ferenc", Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com

Feladatlap

Származtatott aránypárok

1. Az adott aránypárokból kiindulva írjatok 3 azonos tagú származtatott aránypárt és 6 változtatott tagú származtatott aránypárt.

a) $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$, b) $\frac{10}{5}=\frac{6}{3}$.

2. Tudva, hogy $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$, határozzátok meg a következőket:

a) $\frac{y}{x}$; b) $\frac{2x}{3y}$; c) $\frac{2x+3y}{3y}$; d) $\frac{3x}{3x+2y}$; e) $\frac{5x-3y}{3y}$; f) $\frac{7x}{7x-2y}$, g) $\frac{5x-2y}{2x-y}$.

3. Határozzátok meg az *x* és *y* pozitív racionális számokat a következő esetekben:

a) $\frac{x}{y}=\frac{3}{5}$ és $x+y=240$; b) $\frac{x}{y}=\frac{7}{4}$ és $x-y=123$; c) $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}$ és $x+y=42$;

d) $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ és $3x+5y=58$; e) $\frac{2}{x}=\frac{7}{y}$ és $5x-y=300$.

4. Tudva, hogy a $\frac{3x}{4y}$ arány értéke 0,25, határozd meg: a) $\frac{x}{y}$; b) $\frac{4x+y}{3y}$.

5. Egy osztályban a fiúk és a lányok számának aránya $\frac{3}{4}$. Határozzátok meg a fiúk számának és az osztály teljes létszámának az arányát!

6. Egy medencét fehér és kék csempékkel raktak ki 1:3 arányban. Határozzzzátok meg a kék csempék és az összes csempe számának arányát.

Nume prenume:Tempfli Gabriella
Şcoala: Colegiul Naţional "Kölcsey Ferenc", Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com