OSZTÁLY: V.

Elméleti összefoglaló

TERMÉSZETES SZÁM TERMÉSZETES KITEVŐJŰ HATVÁNYAI

A hatványozás azonos tényezőjű ismételt szorzás.

Példa: $2 \cdot 2 \cdot 2$ jelölése 2^3 és a következőképpen olvassuk ki „2 a 3-dik hatványok” vagy „2 a 3-dikon”

Ha a és n természetes számok, $n \neq 0$, akkor $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\ tényező}$.

Az a^n jelölést úgy olvassuk, hogy “*a* az *n-dik hatványon*” vagy “*a* az *n-diken*”. Az ***a*** természetes számot **a hatvány alapjának** nevezzük és az ***n*** természetes számot **hatványkitevőnek** nevezzük.

Példák: $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$

$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Ha $a \neq 0$, akkor $a^0 = 1$ és $a^1 = a$.

Példák: $5^0 = 1$, $5^1 = 5$

Megjegyzés: A 0^0 művelet nem értelmezett.

A műveletet, amellyel kiszámoluk egy hatványt **hatványra emelésnek** vagy **hatványozásnak** nevezzük.

A hatványozás **III rendű művelet**, ezért az összeadások, kivonások, szorzások, osztások előtt végezzük.

Ha zárójelek is vannak a gyakorlatban, akkor előbb elvégezzük a kerek zárójelben levő műveleteket, utána a szögletes zárójelben levőket és végül a kapcsos zárójelben levőket.

Példák: 1) $6^2 : 3 - 9^0 + 2^5 =$

Elvégezzük a hatványozást: $6^2 = 6 \cdot 6 = 36$, $9^0 = 1$, $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$ *és behelyettesítjük az eredményeket a gyakorlatba, a megfelelő helyre, majd folytatjuk a számításokat az ismert sorrendben.*

$= 36 : 3 - 1 + 32 =$

$= 12 - 1 + 32 = 43$

2) $[(3^2 + 3^0)^3 - 125 \cdot 2^3] \cdot 123 =$

Elvégezzük a kerek zárójelben levő műveleteket: $3^2 + 3^0 = 9 + 1 = 10$

$= [10^3 - 125 \cdot 2^3] \cdot 123 =$

$= [1000 - 125 \cdot 8] \cdot 123 =$

$= [1000 - 1000] \cdot 123 =$

$= 0 \cdot 123 = 0$

Nume prenume: Tempfli Gabriella
Şcoala: Colegiul Naţional “Kölcsey Ferenc”, Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com

➢ Számítási szabályok hatványokkal

Bármely *a*, *b*, *m* és *n*, *a* ≠ 0, *b* ≠ 0 természetes számok esetén érvényesek a következő szabályok:

1. Azonos alapú hatványok szorzása

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ Leírjuk az alapot és a kitevőket összeadjuk.

Példa: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$

2. Azonos alapú hatványok osztása

$a^n : a^m = a^{n-m}$ Leírjuk az alapot és a kitevőket kivonjuk.

Példa: $3^5 : 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$

3. Hatvány hatványa

$(a^n)^m = a^{m \cdot n}$ Leírjuk az alapot és a kitevőket összeszorozzuk.

Példa: $(2^3)^4 = 2^{3 \cdot 4} = 2^{12}$

4. Szorzat hatványa

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ A szorzat minden tényezőjét az adott hatványra emeljük.

Példa: $(2^3 \cdot 5)^2 = (2^3)^2 \cdot 5^2 = 2^6 \cdot 5^2$

5. Hányados hatványa

$(a : b)^n = a^n : b^n$ A hányados minden tényezőjét az adott hatványra emeljük.

Példa: $(10^2 : 5)^3 = (10^2)^3 : 5^3 = 10^6 : 5^3$

Megjegyzés: Ahhoz, hogy a hatványokkal való számításokat könnyebben elvégezzük a kitevő nélküli természetes számokhoz írhatunk kitevőnek 1-et: $\boldsymbol{a = a^1}$.

Példa: $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^1 \cdot 2^3 \cdot 2^4 = 2^{1+3+4} = 2^8$

Figyelem! Az azonos alapú hatványok összeadására és kivonására nincs külön szabály. Az $\boldsymbol{a^n + a^m}$ összegnél**,** valamint az $\boldsymbol{a^n - a^m}$ különbségnél előbb kiszámoljuk az a^n és a^m hatványokat, majd összeadjuk, valamint kivonjuk őket.(Ebben az esetben a számításokat a műveletek elvégzésének sorrendjében végezzük)

Példák: $2^4 + 2^3 = 16 + 8 = 24$

$2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$

Figyelem! Ne tévesszük össze az $\boldsymbol{a^{m^n}}$ és az $(a^n)^m$ hatványokat. Az a^{m^n} hatvány kiszámításánál előbb kiszámoljuk a $p = m^n$ hatványt, majd az a^p hatványt.

Példa: $5^{2^3} = 5^8$, viszont $(5^2)^3 = 5^6$

➢ Hatványok összehasonlítása

1. Azonos alapú hatványok összehasonlítása

Két azonos alapú hatvány közül az a nagyobb, amelyiknek a kitevője nagyobb.

Példa: $5^{10} < 5^{12}$, mert $10 < 12$

Nume prenume: Tempfli Gabriella
Şcoala: Colegiul Naţional "Kölcsey Ferenc", Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com

2. Azonos kitevőjű hatványok összehasonlítása

Két azonos kitevőjű hatvány közül az a nagyobb, amelyiknek az alapja nagyobb.

Példa: $3^{18} > 3^{10}$, mert $18 > 10$

3. Különböző alapú és különböző kitevőjű hatványok összehasonlítása

Ha a hatványalapok és a kitevők is különböznek, akkor, ha lehet, azonos alapra vagy azonos kitevőre hozzuk őket (a számítási szabályok segítségével), azután összehasonlítjuk a fenti szabályok alapján.

Példák: 1) $2^{74} > 16^{18}$, mert $16^{18} = (2^4)^{18} = 2^{72}$ és $2^{74} > 2^{72}$

2) $5^{27} > 3^{36}$, mert $5^{27} = 5^{3\cdot 9} = (5^3)^9 = 125^9$

$3^{36} = 3^{4\cdot 9} = (3^4)^9 = 81^9$ és $125^9 > 81^9$.

Megjegyzések: 1. Kisebb számok esetén elvégezzük a hatványozást, majd összehasonlítjuk az eredményeket.

Példa: $2^5 > 3^3$, mert $2^5 = 32$, $3^3 = 27$ és $32 > 27$

2. Ha egy hatvány alapja is és kitevője is kisebb, mint a másik hatványé, akkor ez a hatvány kisebb, mint a másik.

Példa: $16^{32} < 18^{42}$, mert $16 < 18$ és $32 < 42$

➢ **Négyzetszámok (Teljes négyzetek)**

Egy **p** természetes számot négyzetszámnak vagy teljes négyzetnek nevezünk, ha felírható **p = a²** alakban.

Példák: 36 négyzetszám, mert felírható $36 = 6^2$ alakban.

100 négyzetszám, mert felírható $100 = 10^2$ alakban.

A négyzetszámok 100-ig a 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81,100.

Megjegyzés: Egy négyzetszám utolsó számjegye csak 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet.

Nume prenume: Tempfli Gabriella
Şcoala: Colegiul Naţional "Kölcsey Ferenc", Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com

Feladatlap
TERMÉSZETES SZÁM TERMÉSZETES KITEVŐJŰ HATVÁNYAI

1) Számítsd ki:
a) 2^4; b) 6^3; c) 12^2; d) 10^5; e) 32^0; f) 1^{1234}.

2) a) Írd a következő számokat a 2 hatványaként: 4; 16; 8; 1.
b) Írd a következő számokat a 3 hatványaként: 9; 27; 81.
c) Írd a következő számokat 10-es alappal: 1000; 100; 1000000.

3) Számítsd ki:
a) $2^3 + 5^2$; b) $2^2 \cdot 5^3$; c) $3^2 \cdot 6 - 4$; d) $2^4 + 3^3 \cdot 2 \cdot 7^0$.

4) Számítsd ki:
a) $(3^4 + 3^3) \cdot (3^2 + 1)$;
b) $(4 + 3)^2 - (4 - 3)^6$;
c) $(1 + 3 + 3^2 + 3^3) \cdot 2 + 2^2 \cdot 5$;
d) $[(100 - 3 \cdot 5^2) \cdot 4 - 2 \cdot 5^2] \cdot 2 - 5^2$;
e) $(2 \cdot 3 - 5)^8 + (5^2 \cdot 2 - 7^2)^7 + (3^3 - 5^2)^3$.

5) A hatványok számítási szabályai segítségével végezd el:
a) $2^{10} \cdot 2^6 : 2^{14}$; b) $3^{23} : (3^{40} : 3^{19})$; c) $(5^3)^{10} : (5^7)^3$;
d) $7^{15} \cdot 7^{25} - 7^{40}$; e) $5^{17} \cdot 5^{22} \cdot 5^3 : 5^{40}$; f) $(3^5)^8 : (3^9)^4 - (2^2)^3$;
g) $2^{23} : (2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^5 \cdot 2^6)$; h) $(2^{10} \cdot 3^7)^4 : (2^8 \cdot 3^5)^5$; i) $2^{3^2} : 2^5$;
j) $[(2^{10})^8 + 7^{23} : 7^{15} + 23^0] : [(2^5)^{16} + 7 \cdot 7^2 \cdot 7^5 + 1^{15}]$.

6) A hatványok alapját megfelelően átalakítva végezd el a műveleteket:
a) $4^5 : 8^3$; b) $3^7 \cdot 9^4 : 27^5$; c) $27^5 : 3^{15} + 16^5 : 8^6 - 25^3 : 5^5$.

7) Hasonlítsd össze a következő hatványokat:
a) 31^{18} şi 31^{12}; b) 5^{21} şi 7^{21}; c) 2^8 şi 3^5; d) 17^{42} şi 15^{35};
e) 3^{100} şi 9^{48}; f) 5^4 şi 625; g) 4^{16} şi 8^{10}; h) $3 \cdot 2^5 - 30$ şi $2^5 - 1$;
i) 10^{30} şi 30^{10}; j) 3^{220} şi 2^{330} k) 5^{54} şi 3^{72}; l) $(3^2 - 1)^5$ şi $(2 \cdot 3 + 2^2)^5$.

8) Mutasd ki, hogy a következő számok négyzetszámok:
$a = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$; $b = 3^2 + 4^2$; $c = 5 \cdot 10^2 - 7 \cdot 4^3 + 3 \cdot 2^4$;
$d = 2^{25} + 2^{25}$; $e = 3^{121} + 3^{121} + 3^{121}$.
Utasítás: A *d* számnál ismételt összeadás van, ezért felírhatjuk $2^{25} + 2^{25} = 2 \cdot 2^{25} = 2^1 \cdot 2^{25} = 2^{26}$. A $d = 2^{26}$ négyzetszám, mert $2^{26} = (2^{13})^2$.

9) Mutasd ki, hogy az $n = 6^{74} + 1$ nem négyzetszám.

Nume prenume: Tempfli Gabriella
Şcoala: Colegiul Naţional "Kölcsey Ferenc", Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com

Ellenőrízd le, mennyit tudsz!

Önértékelésre javasolt feladatok

(4p) 1) Számítsd ki:

a) $13^2 =$

b) $3^0 + 2^4 =$

c) $2^{25} : (2^{10} \cdot 2^{12}) =$

d) $32 : 4^2 =$

(1p) 2) Számítsd ki $191 - [(7^2 + 1)^2 : 10^2]^7 : (5^2)^6$.

(2p) 3) Hasonlítsd össze a számokat:

a) 2^{18} és 3^{18};

b) 3^{300} és 5^{200}.

(1p) 4) Mutasd ki, hogy az $n = (2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3) : 5 + 1^{12}$ négyzetszám!

(1p) 5) Írd növekvő sorrendbe a 27^{10}, 32^6, 25^{15} számokat!

(1p hivatalból)

Sok sikert!

Nume prenume: Tempfli Gabriella
Școala: Colegiul Național "Kölcsey Ferenc", Satu Mare
E-mail: gtempfli@yahoo.com